ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ
ΕΝΟΤΗΤΑ 4η

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

- Το παρόν μάθημα επικεντρώνεται στη μελέτη της σχετικής κίνησης ενός στερεού σώματος ως προς το άλλο (κίνηση μεταξύ των συνδέσμων των ρομποτικών βραχιόνων).
- Η ανάλυση της στροφής μεταξύ δύο στερεών σωμάτων παρουσιάζει περισσότερες δυσκολίες σε σχέση με τη μετατόπιση .

Η στροφή παρουσιάζει ιδιαίτερο τεχνολογικό ενδιαφέρον, εφόσον η μετάδοση κίνησης γίνεται κατά κανόνα στροφικά. Αυτό οφείλεται:

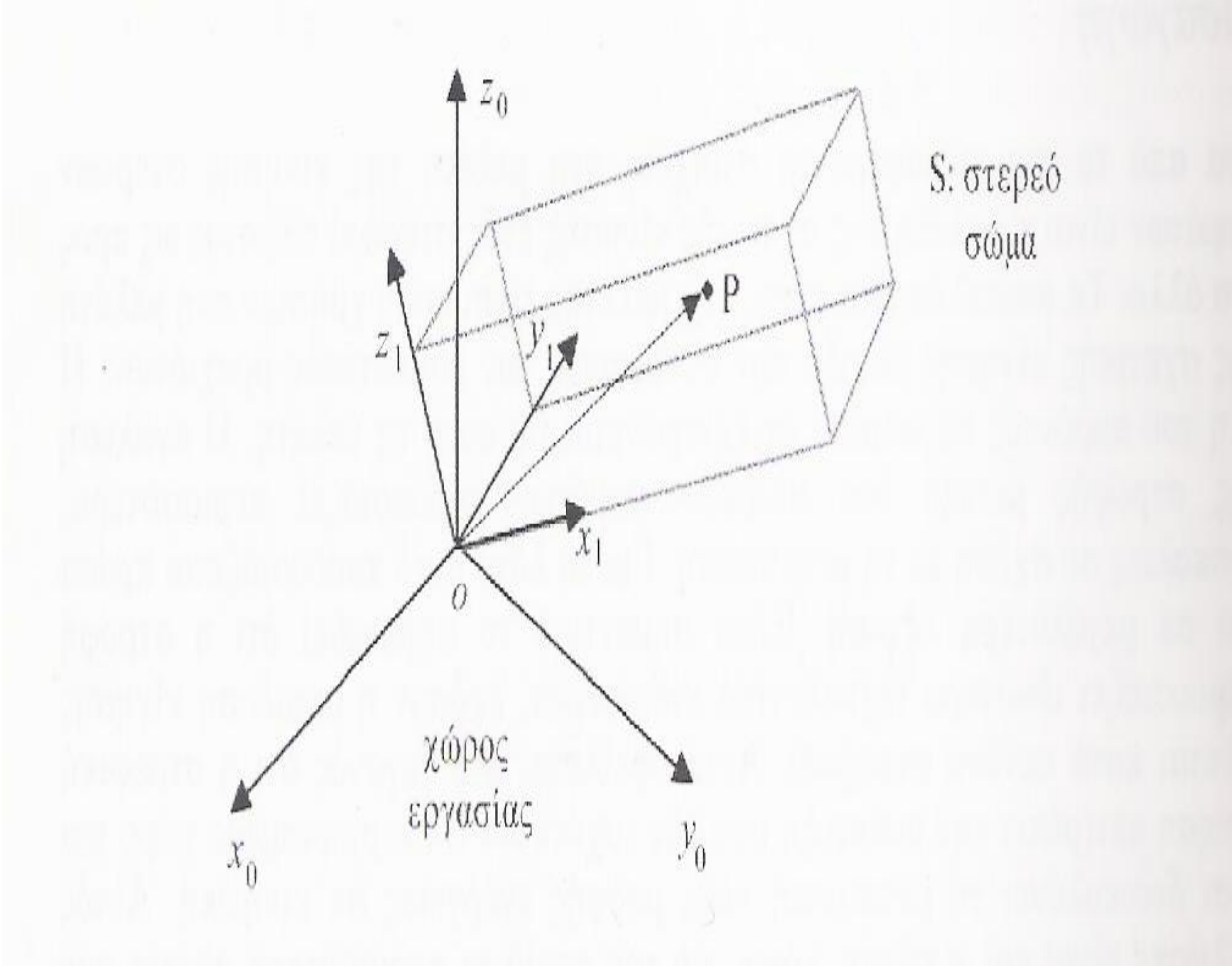
- Στο γεγονός ότι η στροφική κίνηση επιτρέπει την ανάπτυξη υψηλών ταχυτήτων σε περιορισμένο χώρο και έτσι διευκολύνει τη μετατροπή κάθε μορφής ενέργειας σε κινητική. Γι' αυτό και τα περισσότερα ρομπότ που είναι εγκατεστημένα σε εργοτάξια έχουν στροφικές αρθρώσεις.
- Στο γεγονός ότι η παρουσία στροφικών αρθρώσεων προσδίδει αυξημένες δυνατότητες ευελιξίας στο εργαλείο τελικής δράσης.

ΣΤΡΟΦΗ

Έστω το στερεό σώμα S του σχήματος το οποίο είναι προσαρμοσμένο σ’ένα σύστημα συντεταγμένων {O x1 y1 z1 } με ορθοκανονική βάση {i1 j1 k1} και ένα σημείο P πάνω στο στερεό. Το διάνυσμα από την αρχή των αξόνων o μέχρι το σημείο P συμβολίζεται με ***p*** και αναλύεται στην ορθοκανονική βαση ως εξής:

$P = p_{1,x}\,\boldsymbol{i1} + p_{1,y}\,\boldsymbol{j1} + p_{1,z}\,\boldsymbol{k1}$

Όπου $p_{1,x}$ $p_{1,y}$ $p_{1,z}$ οι συντεταγμένες του διανύσματος ως προς το σύστημα συντεταγμένων {O x1 y1 z1 }



Οι τρεις αυτές συντεταγμένες του διανύσματος p ομαδοποιούνται σε έναν πίνακα 3×1

$$p1 = [\, p1,x \;\; p1,y \;\; p1,z \,]^T$$

το $\boldsymbol{p}$ αναλύεται στην ορθοκανονική βαση $\{i_o\ j_o\ k_o\}$ του $\{O, x_o, y_o, z_o\}$ ως εξής:

$$\boldsymbol{p} = p_{o,x}\, i_o + p_{o,y}\, y_o + p_{o,z}\, k_o$$

Όπου $p_{o,x}$ $p_{o,y}$ $p_{o,z}$ *οι συντεταγμένες του διανύσματος ως προς το* $\{O\ x_o\ y_o\ z_o\}$. Οι τρεις αυτές συντεταγμένες του διανύσματος p ομαδοποιούνται σε έναν πίνακα 3×1

$$po = [\, po,x \;\; po,y \;\; po,z \,]^T$$

Εφόσον τα δύο συστήματα συντεταγμένων έχουν κοινή αρχή O δεν υπάρχει μετατόπιση μεταξύ των δύο συστημάτων αλλά μόνο στροφή.

Οι πίνακες p_o, p_1 σχετίζονται με τις σχέσεις:

$$po = \begin{bmatrix} po,x \\ po,y \\ po,z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cdot io \\ p \cdot jo \\ p \cdot ko \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p1,xi1 + p1,yj1 + p1,zk1) \cdot io \\ (p1,xi1 + p1,yj1 + p1,zk1) \cdot jo \\ (p1,xi1 + p1,yj1 + p1,zk1) \cdot ko \end{bmatrix} = R_o^1 \begin{bmatrix} p1,x \\ p1,y \\ p1,z \end{bmatrix} = R_o^1 p1$$

Όπου

$$R_o^1 = \begin{bmatrix} i1 \bullet io & j1 \bullet io & k1 \bullet io \\ i1 \bullet jo & j1 \bullet jo & k1 \bullet jo \\ i1 \bullet ko & j1 \bullet ko & k1 \bullet ko \end{bmatrix}$$

Η πραξη **α•b** δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\alpha=\alpha_x$ ***io***$+\alpha_y$***jo***$+\alpha_z$ ***ko και***
$b=b_x$ ***io***$+b_y$***jo***$+b_z$***ko δηλαδή α•b*** $= \alpha_x b_x + \alpha_y b_y + \alpha_z b_z$. Ο πίνακας R_o^1
Καλείται πίνακας στροφής (rotation matrix).

Η ανάποδη στροφή περιγράφεται από τη σχέση:

$$p1 = \begin{bmatrix} p1,x \\ p1,y \\ p1,z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cdot i1 \\ p \cdot j1 \\ p \cdot k1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (po,xio + po,yjo + po,zko) \cdot i1 \\ (po,xio + po,yjo + po,zko) \cdot j1 \\ (po,xio + po,yjo + po,zko) \cdot k1 \end{bmatrix} = R_1^o \begin{bmatrix} po,x \\ po,y \\ po,z \end{bmatrix} = R_1^o po$$

Οι δύο πίνακες στροφής συνδέονται μεταξύ τους με την ακόλουθη σχέση:

$$R_1^o = (R_o^1)^{-1}$$

Για κάθε πίνακα στροφής ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$(R_o^1)^{-1} = (R_o^1)^T \qquad detR_0^1 = \pm 1$$

Όπου det η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα.

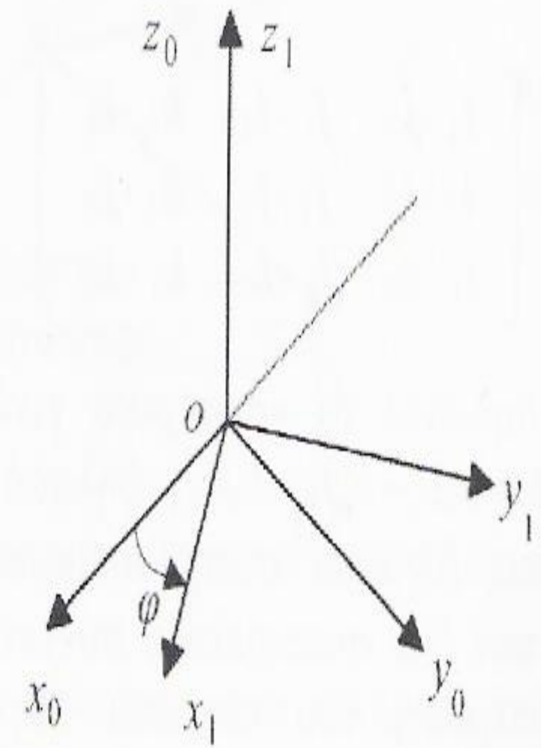
Πίνακας στροφής

- Πίνακας στροφής ονομάζεται ο 3×3 πίνακας που μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων – που έχει στραφεί ως προς ακίνητο σύστημα συντεταγμένων – στις αντίστοιχες συντεταγμένες του σημείου ως προς το ακίνητο σύστημα συντεταγμένων.

Οι βασικές γωνίες στροφής: πρόνευσης, κύλισης και απόκλισης.

Έστω δύο συστήματα συντεταγμένων που έχουν κοινό άξονα z και κοινή αρχή αξόνων. Ο άξονας χ του δεύτερου συστήματος προκύπτει με στροφή κατά γωνία φ του άξονα χ του πρώτου συστήματος.

Η γωνία φ είναι θετική όταν το διαγραφόμενο τόξο κινείται από τον άξονα χ προς τον άξονα y (σύμφωνα με τον δεξιόστροφο κοχλία και με φορά αυτή του άξονα z). Η γωνία στροφής φ γύρω από τον άξονα z καλείται ***γωνία κύλισης*** (roll).



Σχήμα 3.2α : Στροφή του επιπέδου (x, y) (γωνία κύλισης)

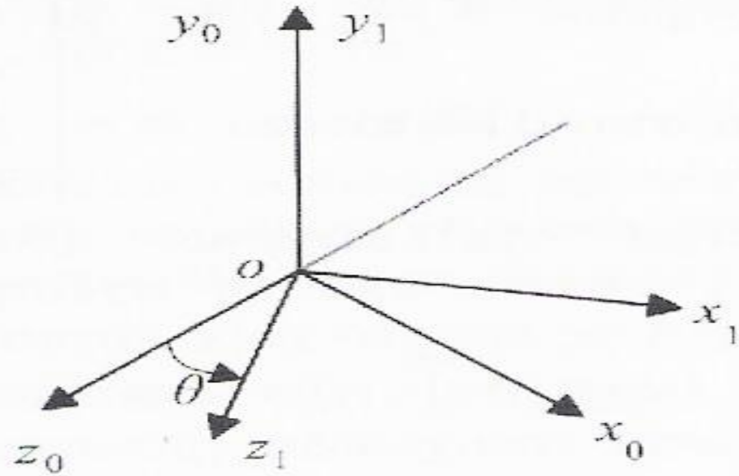
Οι πίνακες στροφής από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο είναι οι εξής:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

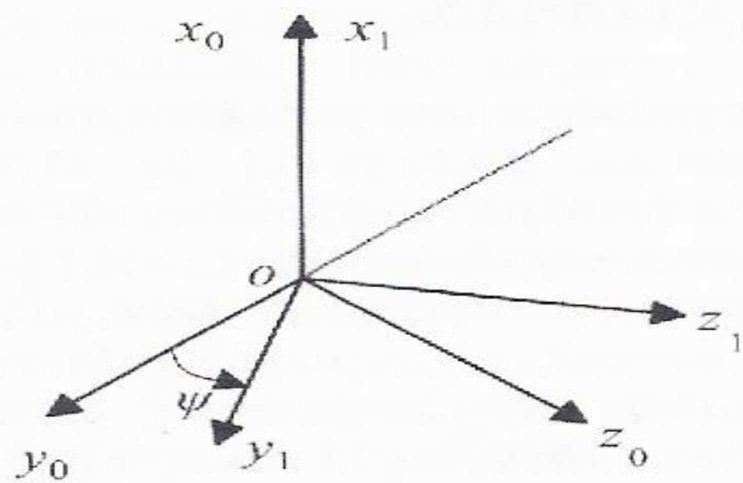
Ο πίνακας R_0^1 της στροφής κύλισης ονομάζεται **πίνακας κύλισης** και συμβολίζεται με $R_{z,\varphi}$.

Οι γωνίες στροφής γύρω από τους άξονες y και x καλούνται **γωνία πρόνευσης** θ (pitch) και **γωνία απόκλισης** ψ (yaw), αντίστοιχα (βλ. Σχήματα 3.2β και 3.2γ). Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία μεταξύ των τριών στροφών (και των αντίστοιχων γωνιών), είναι εύκολο να υπολογισθεί ο **πίνακας πρόνευσης** (συμβολίζεται με $R_{y,\theta}$) και ο **πίνακας απόκλισης** (συμβολίζεται με $R_{x,\psi}$). Ειδικότερα ισχύει ότι:

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad R_{x,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \tag{3.9}$$



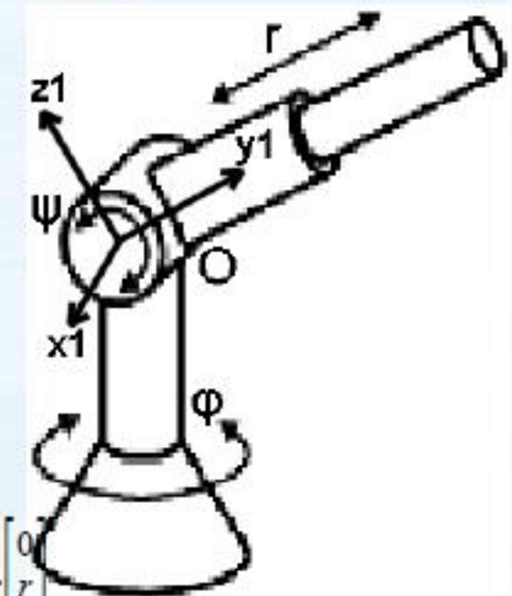
Σχήμα 3.2β : Στροφή του επιπέδου (x, z) (γωνία πρόνευσης)



Σχήμα 3.2γ : Στροφή του επιπέδου (y, z) (γωνία απόκλισης)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του τελικού στοιχείου δράσης ως προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το Ο αν ο βραχίωνας περιστραφεί πρώτα ως προς τον άξονα **z** κατά γωνία φ=π/6, στη συνέχεια ως προς τον άξονα x κατά ψ=π/3 και το έμβολο ρυθμιστεί σε απόσταση r=30cm από το κέντρο Ο.



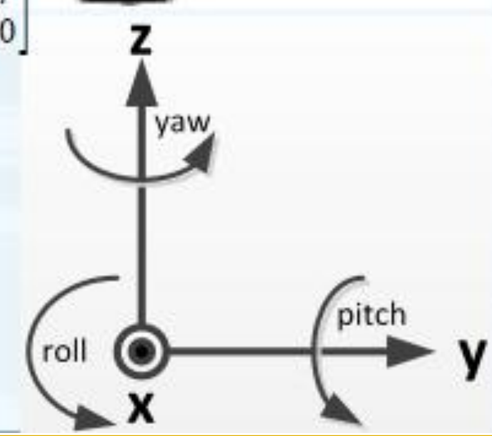
<ins>ΛΥΣΗ:</ins>

Ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{Ox_1, Oy_1, Oz_1\}$ τελικό στοιχείο δράσης θα έχεις πάντοτε τις εξής συνιστώσες:
$\boldsymbol{p}$ = (0, r, 0).

Μετά την περιστροφή του άξονα **z** κατά γωνία φ=π/6 και στη συνέχεια του άξονα x κατά ψ=π/6 οι συντεταγμένες του τελικού σημείου δράσης θα είναι:

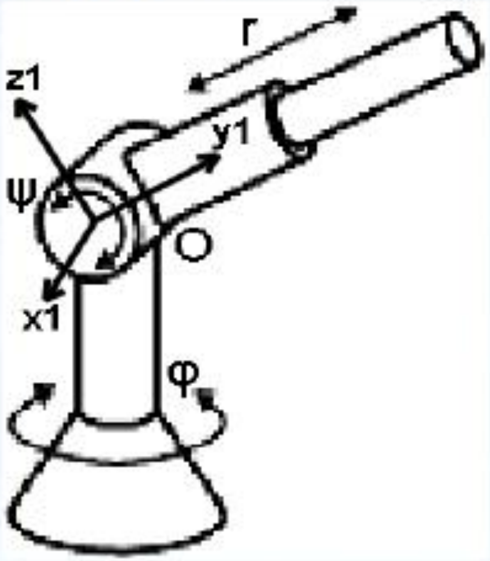
$$\boldsymbol{p}_0 = R_{z,\varphi}\cdot R_{x,\psi}\cdot \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi & 0 \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\upsilon\nu\psi & -\eta\mu\psi \\ 0 & \eta\mu\psi & \sigma\upsilon\nu\psi \end{bmatrix}\cdot \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\psi & \eta\mu\varphi\cdot\eta\mu\psi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\psi & -\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\eta\mu\psi \\ 0 & \eta\mu\psi & \sigma\upsilon\nu\psi \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$$

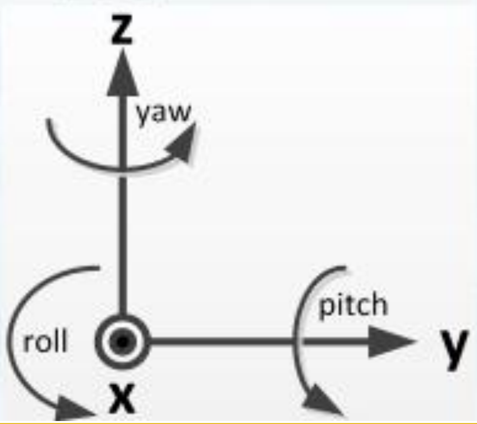
$$\begin{bmatrix} -r\cdot\eta\mu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\psi \\ r\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\psi \\ r\cdot\eta\mu\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}3\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \\ 0{,}3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \\ 0{,}3\cdot\eta\mu\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ 0{,}3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ 0{,}3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}075 \\ 0{,}13 \\ 0{,}26 \end{bmatrix}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Πιο ενδιαφέρον πρόβλημα αποτελεί το αντίστροφο. Να βρεθούν οι γωνίες φ, ψ και το μήκος που πρέπει να προεκταθεί το έμβολο του σχήματος ώστε το τελικό στοιχείο δράσης να βρεθεί στη θέση p1=(1,1,1). Να θεωρηθεί ότι πρώτα γίνεται η περιστροφή του άξονα z και στη συνέχεια η περιστροφή του άξονα x.





ΛΥΣΗ:

Σην προηγούμενη εφαρμογή αποδείχθηκε ότι οι συντεταγμένες του τελικού στοιχείου δράσης ικανοποιούν τη σχέση:

$$p_0=\begin{bmatrix}-r\cdot ημφ\cdot συνψ\\ r\cdot συνφ\cdot συνψ\\ r\cdot ημψ\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-r\cdot ημφ\cdot συνψ\\ r\cdot συνφ\cdot συνψ\\ r\cdot ημψ\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-r\cdot ημφ\cdot συνψ=1 & (1)\\ r\cdot συνφ\cdot συνψ=1 & (2)\\ r\cdot ημψ=1 & (3)\end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{-r\cdot ημφ\cdot συνψ}{r\cdot συνφ\cdot συνψ}=\frac{1}{1}\Leftrightarrow εφφ=-1\Rightarrow φ=-\frac{\pi}{4}\text{ ή αλλιώς } φ=-45^o$$

Το σύστημα των εξισώσεων γίνεται:

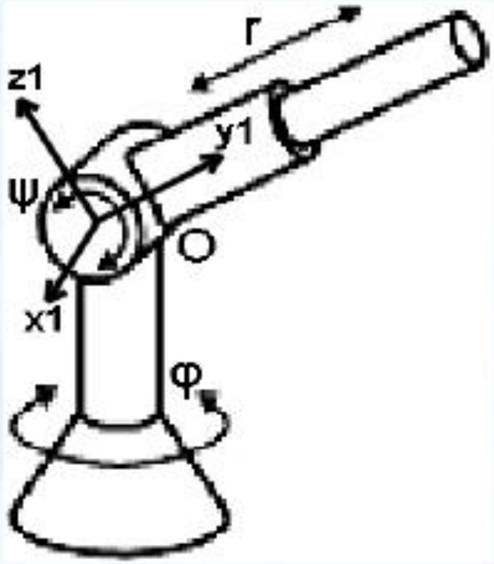
$$\begin{cases}-r\cdot ημ(-\frac{\pi}{4})\cdot συνψ=1 & (1)\\ r\cdot συν(-\frac{\pi}{4})\cdot συνψ=1 & (2)\\ r\cdot ημψ=1 & (3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot συνψ=1 & (1)\\ r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot συνψ=1 & (2)\\ r\cdot ημψ=1 & (3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r\cdot συνψ=\sqrt{2} & (1)\\ r\cdot συνψ=\sqrt{2} & (2)\\ r\cdot ημψ=1 & (3)\end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (3) και (2) έχουμε:

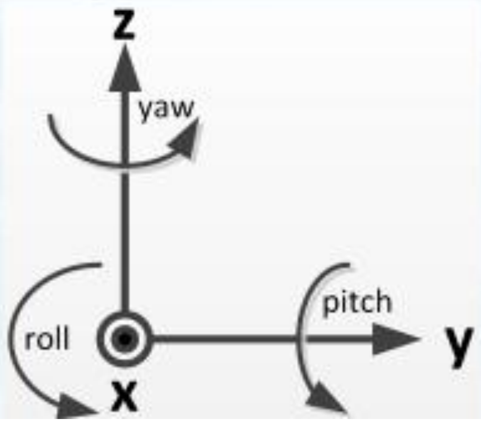
$$\frac{r \cdot \eta\mu\psi}{r \cdot \sigma\upsilon\nu\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\psi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \psi \simeq 35^{o}$$

Αντικαθιστώντας στην (3) και λύνοντας ως προς r προκύπτει:

$$r = \frac{1}{\eta\mu\psi} \Rightarrow r = \frac{1}{\eta\mu 35^{o}} \Rightarrow r = \frac{1}{0{,}58} \Rightarrow r = 1{,}73$$



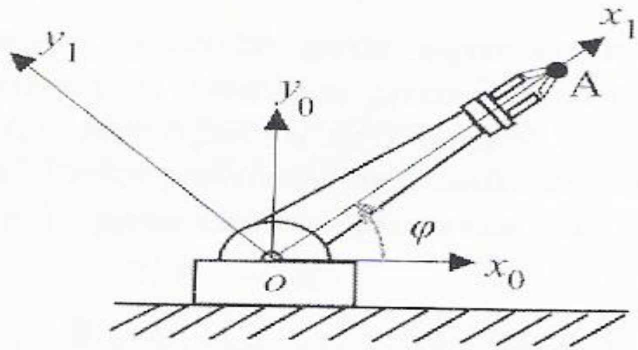
Επομένως για να βρεθεί το τελικό στοιχείο δράσης στο σημείο με συνταταγμένες (1, 1, 1) ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς θα πρέπει να περιστραφεί η άρθρωση που καθορίζει την περιστροφή στον άξονα z κατά γωνία 45^{o} και στη συνέχεια η άρθρωση που καθορίζει την περιστροφή στον άξονα x κατά 35^{o}. Το έμβολο πρέπει να προεκταθεί σε μήκος 1,73.



Για κάθε σημείο θα πρέπει ο επεξεργαστής του ρομποτικού βραχίωνα (μικροελεγκτής, DSP, PLC, FPGA, υπολογιστής) να υπολογίζει τις γωνίες και να δίνει τις κατάλληλες εντολές στους κινητήρες που ελέγχουν την περιστροφή των αρθρώσεων.

Παράδειγμα 3. 1

Εστω Α το σημείο ένωσης των δακτύλων της αρπάγης του επίπεδου ρομποτικού βραχίονα μιας στροφικής άρθρωσης, που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.3. Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του σημείου Α ως προς το χώρο εργασίας. Η απόσταση του σημείου Α από την άρθρωση είναι ίση με l.



Σχήμα 3.3: Επίπεδος ρομποτικός βραχίονας μιας άρθρωσης

Λύση

Οι συντεταγμένες του σημείου Α ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{o\, x_1\, y_1\, z_1\}$ ομαδοποιούνται στον 3×1 πίνακα $p_1 = \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας στροφής από το σύστημα συντεταγμένων $\{o\, x_0\, y_0\, z_0\}$ στο σύστημα συντεταγμένων $\{o\, x_1\, y_1\, z_1\}$ δίνεται από τη σχέση (3.8). Αρα ο πίνακας συντεταγμένων του σημείου Α ως προς το χώρο εργασίας, σύμφωνα με τον τύπο (3.3), είναι $p_0 = \begin{bmatrix} l\cos\varphi & l\sin\varphi & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Το αποτέλεσμα μπορεί εύκολα να επαληθευτεί, χρησιμοποιώντας στοιχειώδη τριγωνομετρία και τη γεωμετρία του Σχήματος 3.3.